Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 2 (4) (2015), 1-13

Zanimljivi zadaci o broju 2015

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
Gimnazija „Svetozar Marković“ u Nišu
dsimce@gmail.com

Mihajlo D. Veljković
OŠ „Aca Sinadinović“ Loćika
veljkovicmihajlo2932@gmail.com

Kosa S. Golubović
Gimnazija „Svetozar Marković“ u Nišu
kosa.golubovic55@gmail.com

Dragi đaci, u radu koji je pred Vama prikazaćemo neke zanimljive zadatke u kojima se koristi broj 2015. Nadamo se da ćete, korišćenjem ideja predstavljenim u ovim zadacima, proširiti svoja znanja iz matematike.

Zadatak 1. $Odrediti\ prirodan\ broj\ n\ i\ prost\ broj\ p\ tako\ da\ važi\ jednakost$:

$$\frac{n}{2015} = \frac{1}{p}.$$

Rešenje: Kako je $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31, p$ može biti jedan od brojeva 5, 13 ili 31, a onda je n jednako 403, 155 i 65, redom.
Dakle, $(n, p) \in \{(403, 5), (155, 13), (65, 31)\}$.

Zadatak 2. $Koji\ od\ brojeva\ je\ veći$: $3^{1209}\ ili\ 2^{2015}$?

Rešenje: Najpre brojeve 2015 i 1209 razložimo na proste delioce, pa je $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ i $1209 = 3 \cdot 13 \cdot 31$. Očigledno je $3^3 < 2^5$. Stepenovanjem leve i desne strane nejednakosti sa $13 \cdot 31$ dobijamo da je $3^{1209} < 2^{2015}$.

Zadatak 3. $Odrediti\ cifre\ a\ i\ b\ tako\ da\ broj\ \overline{2015ab}\ bude\ deljiv\ sa\ 24$.

Rešenje:

Broj $\overline{2015ab}$ će biti deljiv brojem 24 ako važi da je cifra b parna, trocifreni završetak deljiv sa 8 i zbir cifara $8 + a + b$ deljiv sa 3. Iz prvog uslova dobijamo da $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, a iz trećeg da $a + b \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$.
Ovim smo dobili šesnaest mogućnosti od kojih, primenom drugog uslova, dobijamo rešenja $(a, b) \in \{(0, 4), (2, 8), (5, 2), (7, 6)\}$.

Zadatak 4.
$Za\ cifre\ x, y, z, t\ važi\ da\ je\ \overline{x} + \overline{xy} + \overline{xyz} + \overline{xyzt} = 2015. Odredi\ te\ cifre.$

Rešenje: Lako se zaključuje da je $x = 1$ i $y = 8$. Dalje, iz jednačine $1999 + 11z + t = 2015$, zaključujemo da je $z = 1$ i $t = 5$.

Zadatak 5. $Izračunaj$: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)$.

Rešenje:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)=$$

$$=\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{2015}\right)^2\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{2014}{2015}\cdot\frac{2016}{2015}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2016}{2015}=\frac{1008}{2015}.$$

Zadatak 6. $Dokazati\ da\ je$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ \dots\ +\left(\frac{1}{2015}\right)^{2015}<1.$

Rešenje:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ \dots\ +\left(\frac{1}{2015}\right)^{2015}<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ \dots\ +\left(\frac{1}{2015}\right)^2$$
$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ \dots\ +\frac{1}{2014\cdot 2015}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}=1-\frac{1}{2015}<1.$$

(Koristili smo činjenicu da je $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\cdot(n-1)}, n\geq 2$.)

Zadatak 7. $Dokazati\ da\ je$ $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ \dots\ +\frac{1}{2013\cdot 2015}<\frac{1}{6}$.

Rešenje:

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ \dots\ +\frac{1}{2013\cdot 2015}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\ \dots\ +\frac{2}{2013\cdot 2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\frac{9-7}{7\cdot 9}+\ \dots\ +\frac{2015-2013}{2013\cdot 2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ \dots\ +\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2015}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4030}<\frac{1}{6}.$$

Zadatak 8. *Dokazati da važi nejednakost*:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ \dots\ +\frac{2015}{2016!}<1.$$

Rešenje:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ \dots\ +\frac{2015}{2016!}=\left(\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}\right)+\ \dots\ +\left(\frac{2016}{2016!}-\frac{1}{2016!}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\ \dots\ +\left(\frac{1}{2015!}-\frac{1}{2016!}\right)=1-\frac{1}{2016!}<1.$$

Zadatak 9. *Izračunati vrednost zbira*

$$S=\frac{1}{\log_x 5\cdot\log_x 25}+\frac{1}{\log_x 25\cdot\log_x 125}+\ \dots\ +\frac{1}{\log_x 5^{2014}\cdot\log_x 5^{2015}},x>0,x\neq 1.$$

Rešenje:

$$S=\frac{1}{(\log_x 5)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{2014\cdot 2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 5)^2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ +\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 5)^2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2015}\right)=\frac{2014}{2015\cdot(\log_x 5)^2}.$$

Zadatak 10. *Pokazati da brojevi* $a=2^{2013}-2^{2014}+2^{2015}, b=3\sqrt{3}\cdot 2^{2013}$ *i* $c=2^{2014}-2^{2015}+2^{2016}$ *obrazuju Pitagorinu trojku*.

Rešenje:

$a=2^{2013}-2^{2014}+2^{2015}=2^{2013}\cdot(1-2+2^2)=3\cdot 2^{2013}$

$c=2^{2014}-2^{2015}+2^{2016}=2^{2014}\cdot(1-2+2^2)=3\cdot 2^{2014}$

$c^2=9\cdot 2^{4028}=36\cdot 2^{4026}=9\cdot 2^{4026}+27\cdot 2^{4026}=a^2+b^2$,

pa sledi da je (a,b,c) Pitagorina trojka.

Zadatak 11. *Dat je broj* $\overline{aaa\dots a}, a\neq 0.$ *Izračunati zbir*

$$S=\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ \dots\ +\underbrace{\overline{aaa\dots a}}_{2015}.$$

Rešenje:

$$S=a+11a+111a+\ \dots\ +\underbrace{111\dots1}_{2015}a=a\cdot\left(1+11+111+\ \dots\ +\underbrace{111\dots1}_{2015}\right)=$$

$$=a\cdot\left(1+(10+1)+(100+10+1)+\ \dots\ +(10^{2014}+\ \dots\ +10+1)\right)=$$

$$=a\cdot\left(\frac{10-1}{10-1}+\frac{10^2-1}{10-1}+\frac{10^3-1}{10-1}+\ \dots\ +\frac{10^{2015}-1}{10-1}\right)=$$

$$=\frac{a}{9}\cdot(10+10^2+10^3+\ \dots\ +10^{2015}-2015)=$$

$$= \frac{a}{9} \cdot \left(10 \cdot \frac{10^{2015} - 1}{10 - 1} - 2015\right) = \frac{a}{81} \cdot (10^{2016} - 18145).$$

Zadatak 12.
$Dokazati\ da\ postoji\ prirodan\ broj\ n\ takav\ da, za\ polinom\ p(x), sa\ celobrojnim\ koeficijentima, važi\ da\ 2015|\big(p(1) + p(2) + \ ... + p(n)\big).$

Rešenje: Za različite cele brojeve x i y i polinom $p(x)$ sa celobrojnim koeficijentima važi da

$$(x - y)|\big(p(x) - p(y)\big).$$

Dakle, ako je $x \equiv_m y$, onda je i $p(x) \equiv_m p(y)$.

$p(k) \equiv_{2015} p(2015 + k) \equiv_{2015} \dots \equiv_{2015} p(2015 \cdot 2015 + k), \forall k = \overline{1, 2015}.$

$p(k) + p(2015 + k) + \ ... + p(2014 \cdot 2015 + k) \equiv_{2015} 2015 \cdot p(k) \equiv_{2015} 0,$
odnosno

$$2015|\big(p(k) + p(2015 + k) + \ ... \ + p(2014 \cdot 2015 + k)\big), \forall k = \overline{1, 2015}.$$

Ukoliko uzmemo da je $n = 2015^2$, i sabirke u sumi grupišemo na sledeći način,

$p(1) + p(2) + \ ... + p(2015) + p(2016) + \ ... + p(2015^2) =$

$= p(1) + p(2016) + \ ... + p(2014 \cdot 2015 + 1) +$

$p(2) + p(2017) + \ ... \ + p(2014 \cdot 2015 + 2) + \ ... \ +$

$p(2015) + p(4030) + \ ... \ + p(2015^2),$

dobijamo da svaki od ovih 2015 sabiraka jeste deljiv sa 2015 pa

$$2015|\big(p(1) + p(2) + \ ... \ + p(2015) + p(2016) + \ ... \ + p(2015^2)\big).$$

Traženi broj je $n = 2015^2$.

Zadatak 13.
$Dokazati\ da\ je\ broj\ \sqrt{333 \dots 33}\ , gde\ se\ pod\ korenom\ nalazi\ 2015\ trojki,$
$iracionalan.$

Rešenje: Dovoljno je dokazati da broj $\underbrace{333 \dots 33}_{2015}$ ne može biti kvadrat celog broja. Pretpostavimo suprotno, tj. da je taj broj kvadrat nekog celog broja, koji očito mora biti neparan broj, tj. pretpostavimo da je:

$\underbrace{333 \dots 33}_{2015} = (2k + 1)^2 = 4k \cdot (k + 1) + 1$, odakle je $4k \cdot (k + 1) = \underbrace{333 \dots 332}_{2015}$.
Broj $4k \cdot (k + 1)$ je deljiv sa 8, jer je $k \cdot (k + 1)$ deljiv sa 2. Međutim, broj $\underbrace{333 \dots 332}_{2015}$ nije deljiv sa 8 jer mu trocifreni završetak nije deljiv sa 8.
Dobili smo kontradikciju, prema tome, broj $\sqrt{333 \dots 33}$, gde se pod korenom nalazi 2015 trojki, jeste iracionalan.

Napomena: Ukoliko iskoristimo činjenicu da poslednja cifra kvadrata celog broja može da bude $0, 1, 4, 5, 6$ ili 9, dobijamo znatno kraće rešenje zadatka.

Zadatak 14.
Na koliko načina možemo broj 2015 predstaviti kao zbir uzastopnih neparnih celih brojeva? (U zbiru treba da se pojave najmanje dva sabirka.)

Rešenje: Prvo ćemo razmotriti slučajeve kada su svi sabirci pozitivni. Uzastopne neparne brojeve pišemo u obliku: $a+1, a+3, \dots, a+2n-1$. Traženi zbir je:

$$(a+1)+(a+3)+\ \dots +(a+2n-1)=2015.$$

Zbir prvog i poslednjeg sabirka je $2a+2n$, kao i zbir drugog i pretposlednjeg sabirka itd. Pošto ima n sabiraka sledi jednačina:

$$(2a+2n)\cdot\frac{n}{2}=2015, \text{ tj. } (a+n)\cdot n=2015.$$

Važi $n<a+n$. Kako je $2015=5\cdot 13\cdot 31$, razlikujemo sledeće slučajeve:

1) Ako je $n=5$, onda je $a+n=403$, pa je $a=398$, što znači da je prvi broj niza 399.
2) Ako je $n=13$, onda je $a+n=155$, pa je $a=142$, a $a+1=143$.
3) Ako je $n=31$, onda je $a+n=65$, pa je $a=34$, a $a+1=35$.

Na osnovu ovih „pozitivnih rešenja“ naći ćemo i ona rešenja koja sadrže negativne cele brojeve. Sva rešenja su sledeća:

1. $399, 401, \dots, 407$.
2. $-397, -395, \dots, 395, 397, 399, 401, \dots, 407$.
3. $143, 145, \dots, 167$.
4. $-141, -139, \dots, 139, 141, 143, 145, \dots, 167$.
5. $35, 37, \dots, 95$.
6. $-33, -31, \dots, 31, 33, 35, 37, \dots, 95$.
7. $-2013, -2011, \dots, 2011, 2013, 2015$.

Zadatak 15. *Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dati nenula vektori za koje važi da je* $tg\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2015}$. *Izračunati* $\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}\ x\ \vec{b}\,|}$.

Rešenje: Korišćenjem osnovnih definicija skalarnog i vektorskog proizvoda dobijamo da je

$$\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}\ x\ \vec{b}\,|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}\,|cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}\,|sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}=\frac{1}{tg\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}=2015.$$

Zadatak 16. Odredi sva realna rešenja sistema jednačina**:**

$$x_1+x_2+\ \dots\ x_{2015}=2015$$

$$x_1^4+x_2^4+\ \dots +x_{2015}^4=x_1^3+x_2^3+\ \dots +x_{2015}^3.$$

Rešenje: Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\ \dots +(x_{2015}-1)=0$$

$$x_1^3\cdot(x_1-1)+x_2^3\cdot(x_2-1)+\ \dots +x_{2015}^3\cdot(x_{2015}-1)=0$$

Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo da je:

$$(x_1^3-1)\cdot(x_1-1)+(x_2^3-1)\cdot(x_2-1)+\ \dots +(x_{2015}^3-1)\cdot(x_{2015}-1)=0,$$

odnosno:

$$(x_1-1)^2\cdot(x_1^2+x_1+1)+(x_2-1)^2\cdot(x_2^2+x_2+1)+\ \dots+(x_{2015}-1)^2\cdot$$
$$\cdot(x_{2015}^2+x_{2015}+1)=0$$

Kako za x^2+x+1 važi da je $D<0$ i $a=1>0$, zaključujemo da je $x^2+x+1>0, \forall x\in R$, pa je rešenje ovog sistema $x_k=1, \forall k=\overline{1,2015}$.

Zadatak 17. *Pokazati da je proizvod rešenja jednačine* $x^{\log_{2015}x}\cdot\sqrt{2015}=x^{2015}$ *prirodan broj* $(x>0)$.

Rešenje: Logaritmovanjem jednačine za osnovu 2015 dobijamo da je

$$\log_{2015}x\cdot\log_{2015}x+\log_{2015}2015^{\frac{1}{2}}=2015\cdot\log_{2015}x.$$

Uvođenjem smene $\log_{2015}x=m$ dobija se kvadratna jednačina

$$m^2-2015m+\frac{1}{2}=0,$$

odakle je, korišćenjem Vijetovog pravila, $m_1+m_2=2015$. Rešenja polazne jednačine su brojevi $x_1=2015^{m_1}$ i $x_2=2015^{m_2}$ pa je

$$x_1\cdot x_2=2015^{m_1}\cdot2015^{m_2}=2015^{m_1+m_2}=2015^{2015}.$$

Zadatak 18.

Ako su x_1 *i* x_2 *koreni jednačine* $x^2+2015x+1=0$, *a* x_1' *i* x_2' *koreni jednačine* $x^2+2016x+1=0$, *izračunati* $(x_1-x_1')\cdot(x_2-x_2')\cdot(x_1-x_2')\cdot(x_2-x_1')$.

Rešenje: Prema Vijetovim formulama imamo da je

$$x_1+x_2=-2015,\ x_1\cdot x_2=1,\ x_1'+x_2'=-2016 \text{ i } x_1'\cdot x_2'=1.$$

Traženi proizvod jednak je

$$(x_1-x_1')\cdot(x_2-x_2')\cdot(x_1-x_2')\cdot(x_2-x_1')=$$
$$=(x_1^2-x_1x_2'-x_1'x_1+x_1'x_2')\cdot(x_2^2-x_2x_1'-x_2'x_2+x_1'x_2')=$$
$$=(x_1^2-x_1\cdot(x_1'+x_2')+x_1'x_2')\cdot(x_2^2-x_2\cdot(x_1'+x_2')+x_1'x_2')=$$
$$=(x_1^2+2016x_1+1)\cdot(x_2^2+2016x_2+1)=$$
$$=x_1x_2\cdot(x_1+x_2+2016)^2=1.$$

Zadatak 19. *Odrediti sva realna rešenja jednačine*

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\ \dots+(x_{2014}-x_{2015})^2+x_{2015}^2=\frac{1}{2016}.$$

Rešenje: Korišćenjem nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine, imamo da je

$$\sqrt{\frac{(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\ \dots+(x_{2014}-x_{2015})^2+x_{2015}^2}{2016}}\geq$$
$$\geq\frac{(1-x_1)+(x_1-x_2)+\ \dots+(x_{2014}-x_{2015})+x_{2015}}{2016},$$

odnosno $(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\ \dots\ +(x_{2014}-x_{2015})^2+x_{2015}^2 \geq \frac{1}{2016}$.
Jednakosti će važiti ako i samo ako su svi sabirci jednaki, odnosno

$$1-x_1=x_1-x_2=\ \dots\ =x_{2014}-x_{2015}=\frac{1}{2016}.$$

Rešavanjem sistema dobijamo da je $x_k=\frac{2016-k}{2016}, k=\overline{1,2015}$.

Zadatak 20.
Dokazati da jednačina $x^2+y^2+z^2=2015$ *nema rešenja u skupu* N.

Rešenje: Na desnoj strani jednačine je neparan broj pa imamo dve mogućnosti:

1) Sva tri broja na levoj strani su neparna, odnosno
$x=2x_1+1, y=2y_1+1, z=2z_1+1$ i $4\cdot(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_1+y_1+z_1)=2012$.
2) Jedan broj na levoj strani je neparan, a ostala dva su parna, odnosno
$x=2x_1+1, y=2y_1, z=2z_1$ i $4\cdot(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_1)=2014$.

Druga mogućnost otpada jer 2014 nije deljivo sa 4. Iz prve mogućnosti imamo da je

$x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_1+y_1+z_1=503$, odnosno

$x_1\cdot(x_1+1)+y_1\cdot(y_1+1)+z_1\cdot(z_1+1)=503$.

Kako je proizvod dva uzastopna prirodna broja je paran broj, zaključujemo da je na levoj strani jednačine paran broj, a na desnoj neparan broj, što je nemoguće. Dakle, data jednačina nema rešenja u skupu N.

Zadatak 21. *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu*

$$6x^3+12y^3+2014xyz=2015z^3.$$

Rešenje: Pretpostavimo da je rešenje date jednačine trojka (x_0, y_0, z_0). Tada je

$$6x_0^3+12y_0^3+2014x_0y_0z_0=2015z_0^3.$$

Svi sabirci na levoj strani jednačine su parni brojevi pa zaključujemo da z_0 mora da bude paran broj. Dakle, $z_0=2z_1$. Tada prethodna jednačina postaje

$$6x_0^3+12y_0^3+4\cdot 1007x_0y_0z_1=8\cdot 2015z_1^3.$$

Svi članovi ove jednačine, osim člana $6x_{0,}^3$ deljivi su sa 4 pa zaključujemo da x_0 mora biti paran broj. Dakle, $x_0=2x_1$. Tada prethodna jednačina postaje

$$8\cdot 6x_1^3+12y_0^3+4\cdot 2\cdot 1007x_1y_0z_1=8\cdot 2015z_1^3.$$

U ovoj jednačini član $12y_0^3$ mora biti deljiv sa 8 jer su svi članovi deljivi sa 8, odnosno y_0 mora biti paran broj. Dakle, $y_0=2y_1$. Tada prethodna jednačina postaje

$$6x_1^3+12y_1^3+2014x_1y_1z_1=2015z_1^3.$$

Iz ove jednačine sledi da je i trojka (x_1, y_1, z_1) takođe rešenje jednačine. To je moguće samo ako je $x_0=y_0=z_0=0$, jer bismo, u suprotnom, neprestanim deljenjem sa 2 početne trojke (x_0, y_0, z_0) došli do neke trojke u kojoj je bar jedna nepoznata neparan broj, što je nemoguće. Dakle, jedino rešenje je trojka $(0,0,0)$.

Zadatak 22. *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu*

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ \dots\ +x_{14}^4=2015.$$

Rešenje: Koristićemo osobinu celih brojeva:
Pri deljenju četvrtog stepena celog broja brojem 16 može se dobiti ostatak 0 ili1.

- Ako je ceo broj paran, $n = 2k, k \in Z$, imamo da je $n^4 = 16k^4 \equiv_{16} 0$.
- Ako je ceo broj neparan, $n = 2k + 1, k \in Z$, imamo da je $n^4 - 1 = (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2+1) \equiv_{16} 0$ jer je jedan od brojeva $n-1$ i $n+1$, kako su to uzastopni parni brojevi, deljiv sa 4.
  Odavde sledi da je $n^4 \equiv_{16} 1$.

Početna jednačina ima oblik

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{14}^4 = 125 \cdot 16 + 15$$

Pri deljenju sa 16 leva strana može dati najviše ostatak 14, dok je ostatak desne strane 15. Kako jednakost leve i desne strane jednačine nije moguća ni za koje celobrojne vrednosti promenljivih, data jednačina nema rešenja u skupu Z.

Zadatak 23. *U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina*:

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{2015}} = 2015 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2015}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{2015}} = 2015 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2015}}.$$

Rešenje: Zbog definisanosti korena mora biti $x_i \in [-1, 1]$, za $i = \overline{1, 2015}$.

Neka je $\vec{a_i} = \left(\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i}\right)$, $\vec{b} = \left(2015\sqrt{1+\frac{1}{2015}}, 2015\sqrt{1-\frac{1}{2015}}\right)$.

Sistem se svodi na

$$\sum_{i=1}^{2015} \vec{a_i} = \vec{b}.$$

Kako je $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(2015\sqrt{1+\frac{1}{2015}}\right)^2 + \left(2015\sqrt{1-\frac{1}{2015}}\right)^2} = 2015\sqrt{2}$, i

$|\vec{a_i}| = \sqrt{\left(\sqrt{1+x_i}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x_i}\right)^2} = \sqrt{2}$, za $i = \overline{1, 2015}$, dobijamo

$$\left|\sum_{i=1}^{2015} \vec{a_i}\right| = \sum_{i=1}^{2015} |\vec{a_i}|$$

pa važi jednakost u nejednakosti trougla za vektore $\vec{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_{2015}}$, tj. oni su istosmerni (istog smera kao i vektor $\vec{b}$).

Ako je $k \cdot \left(\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}\right) = \left(\sqrt{1+y}, \sqrt{1-y}\right), k \geq 0$, dobijamo

$k^2 \cdot (1+x) = 1 + y$
$k^2 \cdot (1-x) = 1 - y,$

odnosno $k=1$, pa su ovi vektori istosmerni ako i samo ako su jednaki (vektoru $\frac{1}{2015}\vec{b}$). Dalje, jednakost važi ako i samo ako je $\overrightarrow{a_1}= \ ... \ =\overrightarrow{a_{2015}}$, odnosno ako i samo ako je $x_1= \ ... \ =x_{2015}=\frac{1}{2015}$, pa je ovo jedino rešenje sistema.

Zadatak 24. *Odrediti sve prirodne brojeve* n, *takve da* $n|(2015^n-2014^n)$.

Rešenje: Kako $1|(2015^1-2014^1)$, $n=1$ je jedno rešenje ovog zadatka.

Neka je prirodan broj $n>1$ ma koje rešenje ovog zadatka. Neka je p proizvoljan prost faktor broja n. Tada, ako $p|2015$, onda, kako $p|n$, a $n|(2015^n-2014^n)$, zaključujemo da $p|2014^n$, a blagodareći tome da je on prost broj, zaključujemo da $p|2014$, što je nemoguće jer bi p bio zajednički prost faktor brojeva 2015 i 2014, a oni takve nemaju. Analogno odbacujemo mogućnost da $p|2014$. Otuda, uočeni prost faktor p broja n ne deli ni 2015 ni 2014.

Neka je $2015^n-2014^n=x_n$ i p najmanji prost delilac broja n za koji važi da $p\nmid 2014$ i $p\nmid 2015$. Tada, prema Maloj Fermaovoj teoremi, imamo da je $2015^{p-1}-2014^{p-1}\equiv_p 0$, odakle vidimo da $p|x_{p-1}$. Kako znamo da $p|x_n$, zaključujemo da $p|x_{NZD(p-1,n)}=x_1=1$, jer je $NZD(p-1,n)=1$. Kontradikcija.

Dakle, jedino rešenje je $n=1$.

Zadatak 25. *Izračunati vrednost izraza*

$S=\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha-\cdots-\cos2014\alpha+\cos2015\,\alpha, za\ \alpha\neq\pi+2k\pi, k\in Z.$

Rešenje: Datu sumu možemo zapisati u obliku:

$$S=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-\cos2\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos3\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$-\ ...\ -\cos2014\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos2015\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{7\alpha}{2}-\ ...-\cos\frac{4027\alpha}{2}$$
$$-\cos\frac{4029\alpha}{2}+\cos\frac{4029\alpha}{2}+\cos\frac{4031\alpha}{2}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\Big(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{4031\alpha}{2}\Big)=\frac{2\cos\frac{2015\alpha}{2}\cdot\cos1008\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$=\frac{\cos\frac{2015\alpha}{2}\cdot\cos1008\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Napomena: U rešenju zadatka korišćene su formule za proizvod i zbir kosinusa:
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\,(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ i $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Zadatak 26.
Dokazati da za svaki prirodan broj n *postoji prirodan broj* m *takav da*

$$\sqrt{m+2014^n}+\sqrt{m}=\left(\sqrt{2015}+1\right)^n.$$

Rešenje: Rešavanjem jednačine po m dokazaćemo da ona ima rešenje u skupu prirodnih brojeva.

$\sqrt{m+2014^n}+\sqrt{m}=\left(\sqrt{2015}+1\right)^n$

$\sqrt{m+2014^n}=\left(\sqrt{2015}+1\right)^n-\sqrt{m}$. Kvadriranjem jednačine dobijamo:

$m+2014^n=\left(\sqrt{2015}+1\right)^{2n}-2\sqrt{m}\left(\sqrt{2015}+1\right)^n+m$

$2\sqrt{m}\left(\sqrt{2015}+1\right)^n=\left(\sqrt{2015}+1\right)^{2n}-2014^n$. Dalje, jednačinu podelimo sa $\left(\sqrt{2015}+1\right)^n$

$2\sqrt{m}=\left(\sqrt{2015}+1\right)^n-2014^n\left(\sqrt{2015}+1\right)^{-n}$

$2\sqrt{m}=\left(\sqrt{2015}+1\right)^n-\left(\sqrt{2015}-1\right)^n$

$2\sqrt{m}=\sum\binom{n}{i}2015^{\frac{i}{2}}-\sum\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\cdot 2015^{\frac{i}{2}},\ i=\overline{0,n}$

- Ako je $n=2k$, imamo da je $\sqrt{m}=\sqrt{2015}\cdot\sum\binom{2s}{2l+1}2015^l$
- Ako je $n=2k+1$, imamo da je $\sqrt{m}=\sum\binom{2s}{2l}2015^l$

Napomena: Može se koristiti činjenica da postoje prirodni brojevi a i b za koje važi da je
$\left(1+\sqrt{2015}\right)^n=a+b\sqrt{2015}$ i $\left(1-\sqrt{2015}\right)^n=a-b\sqrt{2015}$, odakle množenjem ovih dveju jednakosti dobijamo drugo rešenje ovog zadatka.

Zadatak 27. $Data\ je\ funkcija\ f(x)=x\cdot(1+x^2)^{-0,5}.\ Odrediti\ f^{2015}(x).$

Rešenje: Kako bismo ustanovili pravilo za određivanje $f^{2015}(x)$, odredimo prvo $f^2(x)$ i $f^3(x)$.

$f(x)=x\cdot(1+x^2)^{-0,5}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+x^2+x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$f^3(x)=f\big(f^2(x)\big)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

Sada već uočavamo izvesnu pravilnost u određivanju kompozicija funkcije. Pretpostavimo da je

$f^{2014}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2014x^2}}$ (induktivna hipoteza) i dokažimo da je $f^{2015}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+2015x^2}}$ (induktivni dokaz).

$$f^{2015}(x) = f\left(f^{2014}(x)\right) = f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2014x^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2014x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2014x^2}}}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2014x^2}}}{\sqrt{\frac{1+2014x^2+x^2}{1+2014x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2015x^2}}.$$

Zadatak 28. $Ako\ je\ f(x) = \frac{4^x}{4^x+2}, odrediti\ zbir\ \sum_{i=0}^{2015} f\left(\frac{i}{2015}\right).$

Rešenje:

$$S = \sum_{i=0}^{2015} f\left(\frac{i}{2015}\right) =$$

$$= f\left(\frac{0}{2015}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + \ \dots + f\left(\frac{2015-2}{2015}\right) + f\left(\frac{2015-1}{2015}\right) + f\left(\frac{2015-0}{2015}\right),$$

odnosno

$$S = f\left(\frac{0}{2015}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + \ \dots + f\left(1-\frac{2}{2015}\right) + f\left(1-\frac{1}{2015}\right) + f\left(1-\frac{0}{2015}\right).$$

Uočavamo da je zbir svakog para argumenata onih sabiraka koji su podjednako udaljeni od krajeva ovog zbira jednak jedinici. Primenimo preslikavanje na ove argumente:

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{4}{4^x \cdot 2 + 4} = \frac{4^x}{4^x+2} + \frac{2}{4^x+2} = 1.$$

Iz $f(x) + f(1-x) = 1$, dobijamo da je

$$f(0) + f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2015-1}{2015}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{2015-2}{2015}\right) = 1$$

$$\vdots$$

$$f\left(\frac{2015-2}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2015-1}{2015}\right) + f\left(\frac{1}{2015}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{2015-0}{2015}\right) + f\left(\frac{0}{2015}\right) = 1$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo da je $S = 1008$.

Zadatak 29. $Data\ je\ funkcija\ f\colon R \to R\ definisana\ sa$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2-2x+1}\right)^{-1}.$$

$Odrediti\ \sum_{i=1}^{2015} f(i).$

Rešenje: Data funkcija se može zapisati u obliku

$f(x) = \left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1} + \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right)^{-1}$, odakle korišćenjem formule za razliku kubova dobijamo da je $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}\right)$. Sada je

$2f(1) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0}$

$2f(2) = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1}$

$2f(3) = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

$\vdots$

$2f(2013) = \sqrt[3]{2014} - \sqrt[3]{2012}$

$2f(2014) = \sqrt[3]{2015} - \sqrt[3]{2013}$

$2f(2015) = \sqrt[3]{2016} - \sqrt[3]{2014}.$

Sabiranjem dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^{2015} f(i) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{2016} + \sqrt[3]{2015} - 1\right).$$

Literatura

1. Andrić V., *Matematika X = 1236, Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*, Krug, Beograd 2006.
2. Baltić, V., Đukić, D., Krtinić, Đ., Matić, I., *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.
3. Bogoslavov, Vene, T, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
4. Branković, S. B., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole*, odabrana poglavlja, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.
5. Društvo matematičara Srbije, *Matematička takmičenja srednjoškolaca, godišta* 2005/06–2013/14.
6. Društvo matematičara Srbije, *Matematički list za učenike osnovnih škola*, broj 4 godina 2009/10.
7. Kadelburg, Z., Mićić, V., Ognjanović, S., *Analiza sa algebrom 2*, Krug, Beograd 2002.

8. Kadelburg, Z., Mladenović, P., *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd 1990.
9. Mićić,V., Kadelburg, Z., Đukić, D.,*Uvod u teoriju brojeva*, *materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.
10. Stanić, M., Ikodinović, N., *Teorija brojeva – zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.
11. *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici „Zadaci iz matematike“ časopisa *Tangenta* 1995–2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.
12. Tošić, R., Milošević, D., *Brojevi – nestandardni zadaci*, Arhimedes, Beograd 1996.